Session 2000

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique BCDE – Génie des matériaux

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Séries STI

- Génie Mécanique – options :

Systèmes Motorisés (B), Structures Métalliques (C),

Bois et Matériaux Associés (D), Matériaux souples (E),

- Génie des Matériaux.

Dès que le sujet vous est rends assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.
Le sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré.

Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci).

EXERCICE 1 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
On appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On appelle A_0, A_1 et A_2 les points d'affixes respectives

$$z_0 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

a) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

b) Démontrer que le triangle $A_0A_1A_2$ est rectangle.

c) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par A_0, A_1 et A_2.

EXERCICE 2 (5 points)

Pour imiter la Française des jeux, un particulier crée un jeu de loterie instantanée pour lequel 500 tickets ont été imprimés.
Les tickets gagnants se répartissent de la manière suivante :

Nombre de tickets	Somme en francs gagnée par ces tickets
1	1000
4	200
5	100
90	10

1) Calculer la probabilité qu'un ticket tiré au hasard soit un ticket gagnant.

2) Le prix de vente du ticket est de 10 francs.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque ticket, associe son gain (en tenant compte des 10 francs d'achat : à chaque ticket gagnant 100 F, X associe ainsi 90 F).

a) Déterminer toutes les valeurs prises par X.

b) Calculer la probabilité de l'événement $X = -10$.

c) Déterminer la loi de probabilité associée à X.

d) Calculer et interpréter l'espérance de X.

PROBLÈME (10 points)

Partie A : *Étude d'une fonction auxiliaire.*

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

1) Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.

2) Calculer la limite de la fonction g en 1.

3) a) En remarquant que $g(x) = 1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b) Déduire de 3) a) que la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale en $+\infty$, dont on précisera une équation.

4) a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction g).

Partie B : *Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative.*

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln(x-1).$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, unité graphique 5 cm.

1) a) Calculer la limite de la fonction f en 1.

En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe C, dont on précisera une équation.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $]1\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Calculer $f(2)$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe C dans le repère défini précédemment.

Partie C : ***Calcul d'aire.***

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$F(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} + (x-1)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) x.$$

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.

2) **a)** On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
Déterminer la valeur exacte de A.

b) Donner une valeur de A en cm^2 à 10^{-2} près.